

## 1 万有引力(重力)と重力エネルギー

距離  $r$  だけ離れた質量  $M$  の質点 1 と質量  $m$  の質点 2 の間には、万有引力がはたらく。今、万有引力の大きさを  $F$ 、万有引力定数を  $G(=6.6742 \times 10^{-11} \text{ N m}^2\text{kg}^{-2})$  で表わすと、

$$F = \frac{GMm}{r^2} \quad (1)$$

となる。

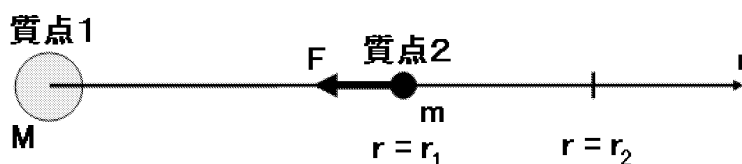
さらに万有引力は大きさと方向を持つので、これをベクトル  $\vec{F}$  を用いて表わすと、距離  $r$  は質点 1 と質点 2 の間の位置ベクトル  $\vec{r}$  で表現でき、さらに位置ベクトル  $\vec{r}$  の増加方向に対して、 $\vec{F}$  は常に反対方向を向くため、

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{|\vec{r}|^3}\vec{r} \quad (2)$$

と表わせることになる。万有引力は「重力 (gravity)」と表現されることが一般的である。また単位質量 ( $m=1$ ) 当りにはたらく重力を重力加速度と呼び  $g$  で表わす。

問 1 式 1 から、重力加速度  $g$  を  $G$ 、 $M$ 、 $r$  を用いて表わせ。

次に重力によってなされる仕事を考える。質点 1 を位置ベクトルの原点とし、質点 2 までの距離を  $r$  とする。そして重力によって質点 2 が  $r = r_1$  から  $r = r_2$  まで移動したとする。



問 2a 重力によって質点 2 が、 $r$  軸に沿って微小量  $dr$  だけ移動したとする。この時、重力が質点 2 に対して行った仕事量  $dW$  を、 $G$ 、 $M$ 、 $m$ 、 $dr$  を用いて表わせ。

問 2b 前問で得られた式を  $r_1$  から  $r_2$  まで  $r$  について積分することで、重力が質点 2 を  $r = r_1$  から  $r = r_2$  まで動かすために要した仕事量を求めよ。

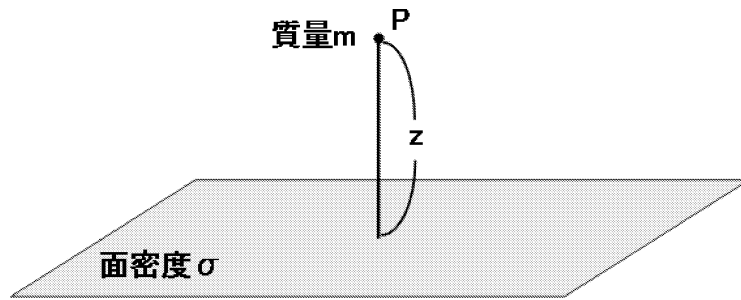
問 2c 重力による位置エネルギー (重力エネルギー) は、物体をその位置から基準点まで移動したときにその力がなす仕事に等しい。一般的に重力エネルギーの基準点は  $r = \infty$  にとる。この時、質点 1 から距離  $r$  の位置にある質点 2 が有する位置エネルギー (重力エネルギー) を  $G$ 、 $M$ 、 $m$ 、 $r$  を用いて表わせ。

問 2d 単位質量 ( $m=1$ ) 当りの位置エネルギーをポテンシャルと呼ぶ。上記の場合のポテンシャル  $\phi$  を示せ。

二つの物体間の距離が、両者のサイズに比べて著しく大きい場合には、物体を質点として扱って差し支えない。しかし、二つの物体の両方、もしくはどちらか一方のサイズが、両者間の距離に比べて無視できない大きさになってくると、重力の取り扱いには若干注意を要するようになる。

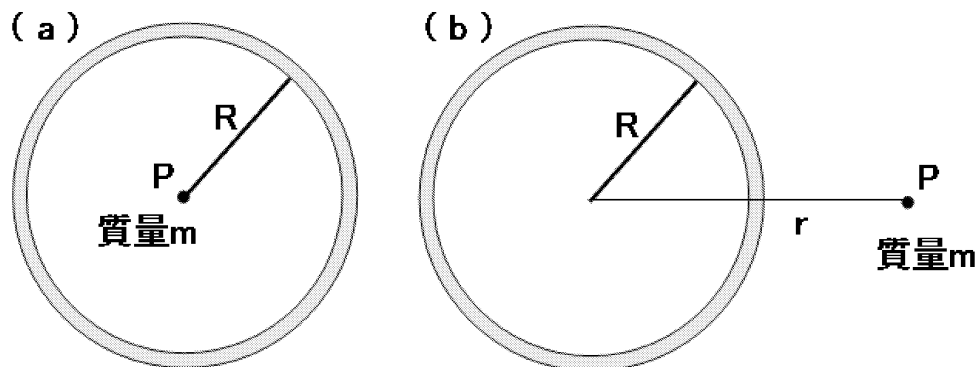
そこで次に質点と広がった大きさを持つ物体との間にはたらく重力を、簡単なモデルについて考えることにする。

問3 無限に広がる平面物体 (面密度  $\sigma$ ) と、それから距離  $z$  だけ離れた点に置かれた質量  $m$  の質点 P の間に働く重力を求めよ。



問4a 半径  $R$ 、質量  $M$ 、厚さ無限小の球殻物体を考える。この球殻物体内部の中心に質量  $m$  の質点 P を置いた場合、P と球殻物体の間に働く重力を求めよ。

問4b 前問と同様の半径  $R$ 、質量  $M$ 、厚さ無限小の球殻物体を考える。P をこの球殻物体の外部でかつ球殻物体の中心から距離  $r$  だけ離れた場所に置いた場合、P と球殻物体の間に働く重力を求めよ。ただし両者の中心間距離  $r$  は、 $R$  に対して無視できない大きさであるとする。



ここで式1について、質点1 (質量  $M$ ) を地球、質点2 (質量  $m$ ) を地球表面に存在する物体 (サイズは地球に比べて十分に無視できるほど小さいとする) と考える。問1で求めた式と、両者の中心間距離が  $r = \text{一定}$ 、と考えられることから、地球表面における重力加速度  $g$  はほぼ一定となっていることが分かる。従って地球表面で、質量  $m$  の物体にはたらく重力の大きさ  $F$  は、

$$F = mg \tag{3}$$

となる。なお重力がはたらく方向と、重力加速度の方向は常に同じであるため、式3をベクトルで表記すると、

$$\vec{F} = m\vec{g} \tag{4}$$

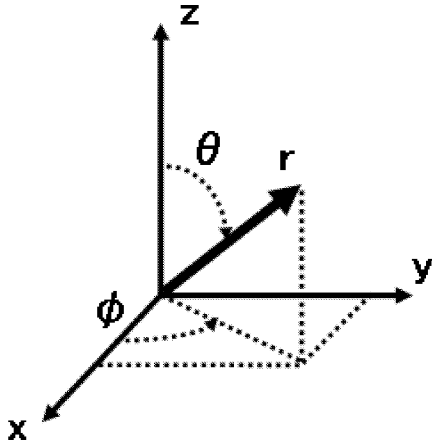
となる。

問5 地球を質量  $5.974 \times 10^{24}$  kg、半径 6378 km の球形と考えた場合、地球表面における重力加速度を求めよ。

## 2 極座標とケプラー運動

天体の力学的性質は、大きな質量を持つ物体のまわりを、小さな質量の物体が回転するモデルで説明されることが多い。そのため天体の運動は、一般的な直交座標系よりは、運動の中心を原点とした極座標系で表現した方が便利である。

そこで今、右手系の直交座標系で表わした質点 P の位置  $(x, y, z)$  を、これと原点を一致させた極座標系  $(r, \phi, \theta)$  で表わすことを考える。ただし、 $\phi$  は  $x$  軸から  $y$  軸方向へ、 $\theta$  は  $z$  軸から  $xy$  平面へ方向を正とする。



問 6a 物体 P の直交座標系での位置  $(x, y, z)$  を  $r, \phi, \theta$  を用いて表わせ。

問 6b 物体 P の直交座標系での速度  $(v_x, v_y, v_z)$  を  $r, \phi, \theta$  を用いて表わせ。

問 6c 物体 P の直交座標系での加速度  $(a_x, a_y, a_z)$  を  $r, \phi, \theta$  を用いて表わせ。

最も身近な天体の運動として、地球を中心とした月の公転や、太陽を中心とした諸惑星の公転が挙げられる。これらの運動を簡単に「地球と月」または「太陽と地球」というように二つの物体のみからなるモデルで考えることにする。このような簡単な二体問題では、一つの平面内での運動を考えれば良い。

また、重力による天体の運動の軌道は、円錐曲線と密接に関連していることが知られている。そこで、具体的な運動の考察に入る前に、円錐曲線について簡単に触れることにする。円錐曲線とは楕円(円)、放物線、双曲線の総称であり、円錐を特定の条件で切断した際に、その断面の形に現れることからこのように呼ばれる。

問 7 楕円、放物線、双曲線は、円錐をどのように切断することで断面の形として得られるか、簡単に説明せよ。

問 8a 楕円とはどのような点の集合のことか説明せよ。

問 8b 楕円の二つの焦点の座標を  $(-x_0, 0)$ 、 $(x_0, 0)$  とした時、直交座標系での 2 次元の楕円の方程式を導け。

問 8c 2 次元の楕円の方程式を、極座標系で表わせ。

問 9a 放物線とはどのような点の集合のことか説明せよ。

問 9b 放物線の一つの焦点の座標を  $(x_0, 0)$  とした時、直交座標系での 2 次元の放物線の方程式を導け。

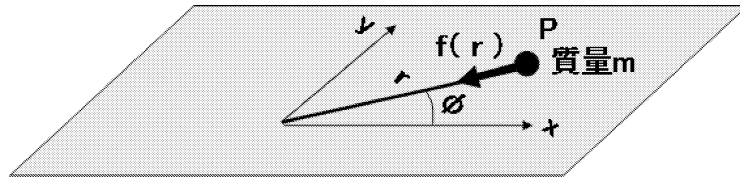
問 9c 2 次元の放物線の方程式を、極座標系で表わせ。

問 10a 双曲線とはどのような点の集合のことか説明せよ。

問 10b 双曲線の二つの焦点の座標を  $(-x_0, 0)$ 、 $(x_0, 0)$  とし、直交座標系での 2 次元の双曲線の方程式を導け。

問 10c 2 次元の双曲線の方程式を、極座標系で表わせ。

続いて、具体的な二体問題についての考察を行う。ここでは質量  $m$  の質点 P が、定点 O に存在する物体からの重力  $f(r)$  を中心力として受け、同一平面内を運動しているものとする。なお質点 P の位置は直交座標系では  $(x, y)$ 、極座標系では  $(r, \phi)$  で表わされるものとする。なおこのような定点 O を“力の中心”と呼ぶことがある。



問 11a 質点 P の直交座標系での位置  $(x, y)$  を  $r, \phi$  を用いて表わせ。

問 11b 質点 P の直交座標系での速度  $(v_x, v_y)$  を  $r, \phi$  を用いて表わせ。

問 11c 質点 P の直交座標系での加速度  $(a_x, a_y)$  を  $r, \phi$  を用いて表わせ。

問 11d 中心力  $f(r)$  の  $x$  方向成分  $f_x$  と  $y$  方向成分  $f_y$  を  $r, \phi$  を用いて表わし、質点 P に対する  $x$  方向成分と  $y$  方向成分の運動方程式を導け。

問 11e 前問で得られた 2 式から、質点 P の動径方向の運動方程式と方位角 (回転) 方向の運動方程式を導け。

問 11e で導出した質点 P に対する動径方向の運動方程式には、 $mr\dot{\phi}^2$  という項が現れるが、これは遠心力を表わしている。そして方位角方向の運動方程式からは、

$$r^2\dot{\phi} = h(\text{一定}) \quad (5)$$

が得られる。この式はケプラーの第 2 法則、面積速度一定の法則を示している。

問 12 問 11e で導いた質点 P の方位角方向の運動方程式から、式 5 を導出せよ。

質点 P の動径方向の運動方程式と式 5 から  $\phi$  を消去すると、

$$m \left( \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} \right) = f(r) \quad (6)$$

が得られる。これは質点 P の動径  $r$  についての運動方程式であり、中心力  $f(r)$  と初期条件が具体的に与えられれば、微分方程式を解いて時刻  $t$  に対する  $r$  を求めることができる。

現代の我々は、既に上記の中心力  $f(r)$  が万有引力であることを知っているが、ここでは万有引力の法則を見出したニュートンに倣って、ケプラーの法則からこれを導くことを考える。

問 13 極座標で表わされた楕円軌道の式 (ケプラーの第 1 法則) と、ケプラーの第 2 法則 (式 5) から、これら二つの法則に従う質点 P が、中心 O からの距離  $r$  の 2 乗に反比例する引力を受けることを示せ。

問 14a  $u = 1/r$  と置き、 $dr/dt$  と  $du/d\phi$  の関係を求めよ。

問 14b 前問で導出した式を時間微分することで、 $\phi$  に対する  $u$  の微分方程式を求めよ。

問 14c 前問で得られた方程式は、 $\phi$  に関する  $u$  の非斉次線形微分方程式である。この特解を求めよ。

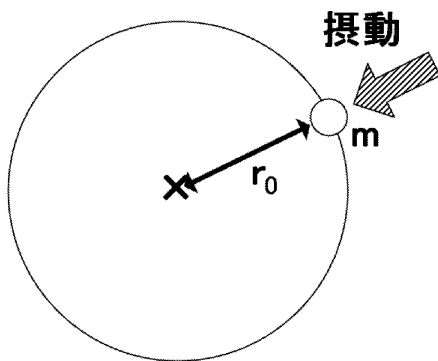
問 14d  $\phi$  に対する  $u$  の微分方程式の一般解を求め、質点の軌道が楕円になることを示せ。

問 13 では楕円軌道の式を与えることで、中心力が距離  $r^2$  に反比例することを示したが、ここでは反対のことを考える。つまり、中心力を受ける質点に対する動径方向と方位角方向の運動方程式に対して、太陽質量を  $M$ 、惑星質量を  $m$ 、万有引力定数を  $G$ 、太陽-惑星間距離を  $r$  とすると、中心力  $f(r)$  は、

$$f(r) = -G \frac{Mm}{r^2} \quad (7)$$

となる。そしてこの条件の下で、 $r$  と  $\phi$  の関係を導くことで、この時の惑星の軌道が、楕円になること (ケプラーの第 1 法則) を示すことができる。

問 15 楕円軌道が囲む面積と、ケプラーの第 2 法則から、ケプラーの第 3 法則を導け。



問 16a 式 6 において、質点の位置エネルギーを  $U(r)$  とする。この時の質点に対するラグランジアンを示せ。

問 16b 質点の運動が円運動になるための条件を示せ。なお、円運動の半径を  $r_0$  とせよ。

問 16c 円運動をする質点に対して、動径方向 ( $r$  方向) に摂動が加えられた場合、 $r = r_0$  付近で質点が行う微小振動の周期を求めよ。

### 3 電磁波放射の基礎 ~ 黒体放射の物理

宇宙物理学を初めとする宇宙科学の目的の一つは、様々な天体の形成・進化などを明らかにすることである。そのためには天体の性質を多角的に把握する必要がある。残念なことに人類は、ほんの一部の例外を除いて、直接天体がいる場所まで赴くことができない。従って、天体の性質を理解するためには、天体から放射されてくる様々な電磁波を捉え、その振る舞いを調べる他には方法がない。この天体から放射される電磁波を検出する行為を『観測』という。

我々が肉眼で感知できる電磁波は、個人差があるものの、一般に波長 350nm ~ 750nm のものである。この波長帯の電磁波を可視光もしくは簡単に光などと呼ぶ。可視光よりも波長が短くなるにつれて紫外線、X線、 $\gamma$ 線と呼ばれるようになる。反対に波長が長くなるにつれて、赤外線、電波などと呼ばれる。これらには波長・振動数・エネルギー・用途などによって、さらに細かい名称が付けられている(軟X線、近紫外線、中間赤外線、サブミリ波、など)。

電磁波はその名称の通りの波動であり、真空中の伝達速度が約 30 万 km/s の横波である。従って電磁波は、進行方向に垂直な平面に振動方向の自由度 2 を持ち、偏光という現象を示す。これら電磁波の一般的な性質は、マクスウェルによって整理された、四つの方程式から導くことができる。

問 17a マクスウェル方程式を積分形で示し、それぞれの方程式の物理的意味を説明せよ。

問 17b マクスウェル方程式を微分形で示せ。

電磁波は真空中を伝播してくるため、マクスウェル方程式に対して電流および電荷はゼロとすることができる。

問 18a 電流および電荷をゼロとしたマクスウェル方程式から光速度を示せ。なお必要があれば、ベクトル演算子に対して、

$$\text{rot} \cdot \text{rot} = -\Delta + \text{grad} \cdot \text{div} \quad (8)$$

を用いよ。

問 18b 電流および電荷をゼロとしたマクスウェル方程式から電磁波が横波であることを示せ。

また、任意のベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  に対して恒等式、

$$\text{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \text{ rot } \vec{a} - \vec{a} \text{ rot } \vec{b} \quad (9)$$

が成り立つ。

問 19 式 9 に対して  $\vec{a} = \mathbf{E}$ ,  $\vec{b} = \mathbf{B}$  とおくと、

$$\frac{1}{\mu} \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 + \frac{\epsilon}{2} \mathbf{E}^2 \right) \quad (10)$$

となることを示せ。

式 10 に対して、

$$\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (11)$$

というベクトルを定義する。このベクトル  $\mathbf{S}$  はポインティング・ベクトル (Poynting Vector) と呼ばれる

問 20 。ポインティング・ベクトルの大きさが、電磁波のエネルギー密度に光速を乗じた形で表わされることを示せ。

波動としての電磁波の性質が確認できたところで、次に電磁波の放射過程を考察する。電磁波の放射過程には様々なものが考えられるが、まず最初に黒体からのエネルギー放射過程を概観する。恒星、特にその中でも宇宙を形作る銀河の主要成分は主系列星と呼ばれる巨大な水素ガス球である。主系列星からは、その表面温度に応じた黒体放射による連続光が放射されているが、主系列星の表面温度は数万 K から数千 K におよぶ。特に太陽のような G 型星と呼ばれる標準的な恒星からの黒体放射は、可視光波長域にその放射強度のピークを持つ(地球上で進化した生物の多くが、可視光波長帯の電磁波に感度を持つ感覚器官を有しているのは、まさしくこのためである)。ここでは物体からの熱放射を、温度  $T$  で熱平衡状態にある一次元調和振動子の系をモデルとして取り扱う。

**問 21a** 原点 ( $x = 0$ ) に中心を持つ、質量  $m$ 、バネ定数  $k$  の一次元調和振動子のハミルトニアン  $H$  を示せ。

**問 21b** 一次元調和振動子のエネルギーを  $\hbar\omega$  ( $\omega = \sqrt{k/m}$ ) で表わし、さらに  $\xi = x/\sqrt{\hbar/m\omega}$  と変数変換することで、シュレディンガー方程式  $H\Psi = E\Psi$  を解き、エネルギー固有値  $E_n$  を求めよ。

前問から、振動数  $\omega$  の振動モードにある一次元調和振動子の系は、 $\hbar\omega$  を単位とする離散的なエネルギー  $E_n$  を持つことが分かる。ここで、簡単のためにゼロ点エネルギーを無視すると、この振動数  $\omega$  の振動モードにある一次元調和振動子は、エネルギー  $\hbar\omega$  を持つ熱放射の電磁波、つまり光子と捉えることができるため、このゼロ点エネルギーを無視した固有エネルギー  $E_n$  とは、エネルギー  $\hbar\omega$  (即ち振動数  $\omega$ ) の光子が  $n$  個存在する状態と等価であると考えることができる。

この一次元調和振動子の系が、あるエネルギー  $E_n$  を持つ確率  $P(E_n)$  は、ボルツマン因子  $\exp(-E_n/k_B T)$  に比例する。さらに全てのエネルギー状態に対するボルツマン因子の和  $Z$  は分配関数 (partition function) と呼ばれ、これを用いることで熱力学・統計力学的な様々な物理量を得ることができる。

**問 22a** 温度  $T$  で熱平衡状態にある一次元調和振動数の系 (エネルギーモードは  $E_n = n\hbar\omega$ ) に対する分配関数  $Z$  を示せ。ただし  $\hbar\omega/k_B T \ll 1$  として良い。

**問 22b** 上記の分配関数  $Z$  を用いて、一つのエネルギーモードの光子数の熱平均値  $\langle n \rangle$  を求めよ。

**問 22c** 振動数  $\omega$  の振動モードの平均エネルギー  $\langle E \rangle$  を求めよ。

**問 22d** 上記平均エネルギーの古典極限 ( $k_B T \gg \hbar\omega$ ) を求めよ。

$\langle n \rangle$  のような振る舞いを示す関数を、プランク分布関数 (Planck distribution function) と呼ぶ。

量子化された系のエネルギーを導く方法が明らかになったところで、さらに一辺の長さが  $L$  の立方体 (空洞) に閉じ込められた電磁波について考える。この空洞の中に生じる電磁波の定在波のモードを一次元調和振動子と捉えることで、空洞からの電磁波放射をより詳細に考察することができる。そのためにはまず、空洞内に生じる電磁波の定在波をモデル化する必要がある。

今、電磁波の最大振幅を  $A$ 、角振動数を  $\omega$ 、波長を  $\lambda$  として、 $x$  方向、 $y$  方向、 $z$  方向の電磁波振動の時間に依存しない成分をそれぞれ  $\phi_x(x)$ 、 $\phi_y(y)$ 、 $\phi_z(z)$  と表わすことにすると、この電磁波の振動  $\phi$  は、

$$\phi = A\phi_x(x)\phi_y(y)\phi_z(z)\sin(\omega t) \quad (12)$$

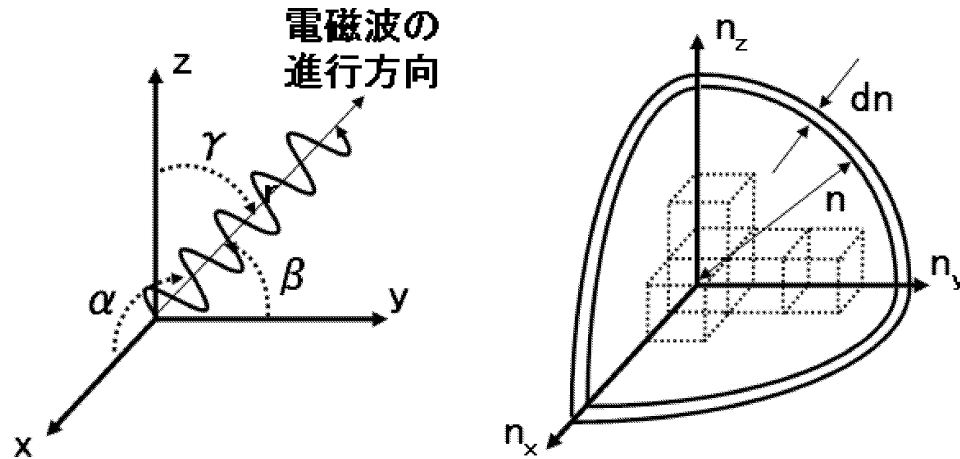
と表わされる。

問 23a  $\phi_x(x)$  を正弦波と考えて、 $\lambda$  を用いて  $\phi_x(x)$  を表わせ。ただし振幅の大きさは 1 とし  
てよい。

問 23b  $x$  方向に定在波が存在する条件を考慮して、 $\phi_x(x)$  を整数  $n_x$  を使って書き直せ。

問 23c  $y$  方向、 $z$  方向も上記と同様に考えて、式 12 を整数  $n_x$ 、 $n_y$ 、 $n_z$  を使って書き直せ。

問 23d 波長  $\lambda$  の電磁波の伝播方向が、 $x$  軸、 $y$  軸、 $z$  軸となす角度をそれぞれ  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ 、と  
する時、定在波が生じる条件を、 $L$ 、 $\lambda$ 、 $n_x$ 、 $n_y$ 、 $n_z$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  を用いて示せ。



空洞内で電磁波が定在波を生じる条件が明らかになったところで、さらに方向余弦に関する関係式、 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$  を用いると、

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = (2L/\lambda)^2 = (\omega L/\pi c)^2 \quad (13)$$

が得られる。

この式は、空洞に閉じ込められた電磁波の振動状態が三つの整数の組み合わせ  $(n_x, n_y, n_z)$  で決まることを示している。あるエネルギー状態  $E_n$  に対して取り得る状態の数が分かれば、この電磁波振動を統計力学的に取り扱うことができる。今、改めて整数  $n$  を、

$$n^2 \equiv n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 \quad (14)$$

と導入すると、 $\omega_n = n\pi c/L$  と表わすことができる。また空洞内に定在波が生じるためには、 $n_x > 0$ 、 $n_y > 0$ 、 $n_z > 0$  が同時に成り立たねばならない。これは  $n$  で示される状態数は、位相空間  $(n_x, n_y, n_z)$  中の半径  $n$  の球の 1/8 の領域 (即ち  $n_x > 0$ 、 $n_y > 0$ 、 $n_z > 0$  の領域) だけを考えれば良いことを意味している。

空洞内の電磁波の全エネルギー  $U$  は、

$$U = \sum_n \langle E_n \rangle = \sum_n \frac{\hbar \omega_n}{\exp(\hbar \omega_n/k_B T) - 1} \quad (15)$$

である。

問 24a 位相空間  $(n_x, n_y, n_z)$  において、 $n$  以下の状態数は、半径  $n$  の球の 1/8 の中に存在する 3 次元の単位格子数で表わされる。この時、 $n$  と  $n + dn$  の間に含まれる状態数を求めよ。

問 24b 前問で導いた式を用いて、式 15 の右辺の  $n$  に対する和を、 $n$  に対する積分と見なし計算し、空洞内の電磁波の単位体積・単位振動数・単位時間あたりのエネルギー量を求めよ。



前問で得られた、空洞内の電磁波が有する単位体積あたりのエネルギー量の式は、プランクの輻射則 (Planck radiation law) と呼ばれる式であり、熱輻射の振動数 (波長) 分布を与える式である。理想的な黒体 (black body) からは、この式に従った強度分布を示す電磁波が放射され、このような放射を黒体放射 (Black body radiation) と呼ぶ。

プランクの輻射式が提唱される以前、19世紀末から20世紀初頭には、効率的な製鉄のために炉の温度をできるだけ精密に測定する必要があった。そのためには炉からの放射スペクトルと炉の温度とを関係付けることが急務であった。レーリー (Rayleigh) とジーンズ (Jeans) は、 $E(\nu) \propto \nu^2 T$  という関係式を提唱したが、この関係式は振動数  $\nu$  が大きい領域では炉の温度をうまく求めることができなかった。またウィーン (Wien) は  $E(\nu) \propto \nu^3 \exp(-h\nu/k_B T)$  という関係式を提唱したが、こちらは反対に振動数  $\nu$  が小さいところでは、うまく炉の温度を決定することができなかった。今では、両者がそれぞれプランクの輻射則の低振動数・高振動数での極限となっていることが知られている。

問 25a  $\nu(\omega = 2\pi\nu)$ ,  $h(\hbar = h/2\pi)$  を用いて、プランクの輻射式を表わせ。

問 25b プランクの輻射則は、 $\nu \ll 1$  条件下でレーリー・ジーンズの輻射式で近似できることを示せ。

問 25c プランクの輻射則は、 $\nu \gg 1$  条件下ではウィーンの輻射式で近似できることを示せ。

またウィーンは、実験による経験則として、“**輻射強度が最大となる振動数  $\nu_{max}$  は、物体の温度が高いほど大きくなる**” ことを見出しており、この関係はウィーンの変位則として知られている。ウィーンの変位則は、 $\nu_m$  に対応する波長を  $\lambda_m(\lambda_m = c/\nu_m)$  とすると、

$$\lambda_m = A/T, \quad A = \text{const.} \quad (16)$$

と表わされる。

問 26a プランクの輻射式から、ウィーンの変位則を求めよ。

問 26b 太陽 (G 型主系列星) からの可視光帯の電磁波放射を、表面温度 5800K の黒体放射と仮定し、この時の輻射強度最大の波長を  $5500\text{\AA}$  とする。ここで B1 型、A0 型、M1 型主系列星の放射強度の最大波長を調べたところ、それぞれ  $1170\text{\AA}$ 、 $2900\text{\AA}$ 、 $9380\text{\AA}$  であった。これらの恒星の表面温度を推定せよ。

なお実際のウィーンの変位則では  $A = 0.29\text{cm}\cdot\text{K}$  となる。

さらにステファン (Stefan) は実験から、黒体から放射される全輻射エネルギー  $E$  と温度  $T$  が、

$$E = \int_0^\infty E(\nu) d\nu = \sigma T^4, \quad \sigma = 5.67 \times 10^{-5} \text{erg/cm}^2 \text{sK}^4 \quad (17)$$

という関係にあることを見出した。この関係式はステファンの  $T^4$  則 (Stefan's  $T^4$  law) またはステファン・ボルツマンの法則 (Stefan-Boltzman law) として知られる関係であり、プランクの輻射式  $E(\nu)$  を全周波数に対して積分することで得られる。

問 27a  $y = x^2(-\pi \leq x \leq \pi)$  をフーリエ級数展開することで、 $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$  を計算せよ。

問 27b  $y = x^4(-\pi \leq x \leq \pi)$  をフーリエ級数展開することで、 $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4}$  を計算せよ。

問 27c プランクの輻射式を全波長 (全振動数) 域に対して積分することで、ステファン・ボルツマンの  $T^4$  則を導出せよ。

前述したように、恒星からの電磁波放射の主成分は、恒星表面温度に対応した黒体放射である。しかし恒星大気には様々な物質 (金属・原子ガス・分子ガス) が存在するため、実際には、黒体放射と恒星表面に存在する物質に対応した吸収線 (場合によっては輝線) が観測されることになる。

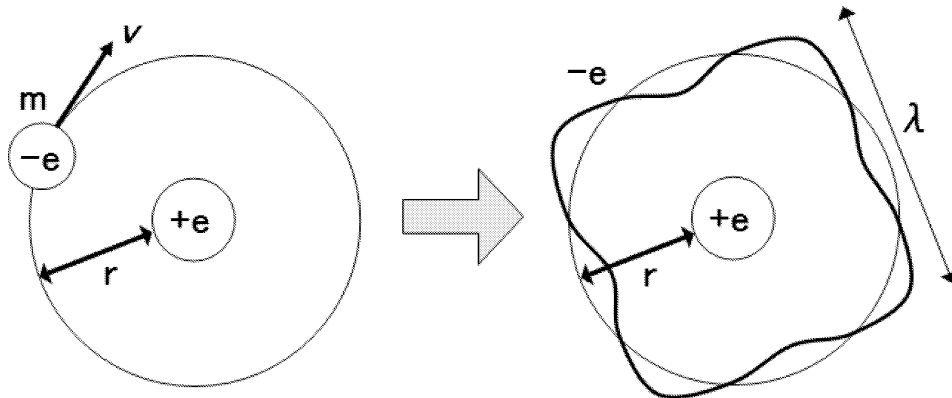
## 4 電磁波放射の基礎 ～ 原子・分子の構造と輝線・吸収線

19世紀末から20世紀初頭にかけて、相対論と量子論という二つの新たな概念が登場した。1800年代末には”もう研究することは何も無い”とまで言われた物理学の研究は、これによって大きなパラダイム・シフトを余儀なくされた。また天文学者は、この大きな発展によって、地球上にいながら、遥か彼方に存在する天体に手を触れることなく、その本質を探る術を手に入れた。

量子論の進展によって得られた大きなパラダイム・シフトの一つは物質波 (またはド・ブロイ波) の概念である。ド・ブロイ (de Broglie) は、粒子と考えられてきた電子が波動的な性質を示すことから、物質に波動としての性質を認めることを提唱した。ド・ブロイによれば、質量  $m$  の物体が速さ  $v$  で運動する場合、

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p} = \frac{2\pi}{k} \quad (18)$$

という波であると思なすことができる。ここで  $p$  は運動量で  $p = mv$ 、 $\lambda$  は物質波の波長、 $k$  は波数である。そして物質波の概念を、原子内に束縛された電子に応用することで“荷電粒子である電子が、何故エネルギーを失うことなく半永久的に原子核の周りを回り続けることができるのか?” という問題に解決の糸口を与えることができる。即ち、原子内を運動する電子を波動と考えた場合、電子は原子核の周りを回転するうちに、互いに波が打ち消しあい、あっという間に減衰・消滅してしまう。しかし、波動としての電子の波長が原子核周りの軌道に対して、定常波を形成した場合を考えると、この場合に限っては電子の波は消滅することなく、半永久的に存在し続けることができるようになる。



問 28a 原子内に束縛された電子と原子核間の距離を  $r$ 、電子の質量を  $m$ 、回転速度を  $v$  とした場合、整数  $n$  を用いて、円運動する電子が定常波を形成する条件 (ボーアの量子条件) を示せ。ただし電子は円運動と考えてよい。

問 28b 今、水素原子に束縛された電子が円運動していると考え、真空の誘電率を  $\epsilon_0$ 、電子の電荷を  $-e$  として、電子に対する動径方向の運動方程式を示せ。

問 28c 電子が持つ全エネルギーを  $m$ 、 $v$ 、 $e$ 、 $r$  を用いて示せ。

問 28d 電子が持つ全エネルギーを  $\epsilon_0$ 、 $e$ 、 $r$  を用いて表わせ。

問 28e 前問で導いた式に、ボーアの量子条件を導入することで、電子が持つ全エネルギーを  $m$ 、 $e$ 、 $\epsilon_0$ 、 $n$  を用いて表わせ。

前問の最後で導いた式は、原子内に束縛された電子の全エネルギーが整数  $n$  を用いて表わされ、これが離散的な値しか取れないことを示している。この  $n(=1,2,3,\dots)$  で決定される離散的なエネルギーレベルのことをエネルギー準位と呼び、この整数  $n$  を**主量子数 (principal quantum number)** という。特に最もエネルギーが低い状態である  $n = 1$  の状態は**基底状態**と呼ばれ、それ以外のエネルギー準位を**励起状態**という。

ガイスラー管などにガスを封入して減圧し、高電圧をかけるとガスの発光現象が観察される。この発光スペクトルはガスの種類や電極の物質によって異なるが、何れも特定の波長(色)のみで明るく輝くことが知られていた。このようなスペクトルを輝線 (line emission, emission line) と呼ぶ。バルマー (Balmer) は水素ガスの輝線スペクトルを詳細に調べ、その結果、観察される輝線の波長が、整数  $n$  を用いて、

$$\lambda = \lambda_{\infty} \frac{n^2}{n^2 - 4} \quad (19)$$

と表わされることを見出した。この一連の輝線スペクトルの系列をバルマー系列と呼ぶ。なおここで  $\lambda_{\infty} = 3646(\text{\AA})$  である。

バルマー系列は可視光波長域に現れる輝線スペクトルの系列であるが、水素ガスに対する同様の系列は他にも見つかっており、リドベルグ (Rydberg; リュードベリー) は、これらを整理することで、輝線スペクトルの波長  $\lambda$  に対して、

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\text{H}} \left( \frac{1}{l^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (20)$$

という関係を得るに至った。この関係式はリドベルグの公式と呼ばれ、 $R_{\text{H}}$  はリドベルグ定数といい、 $R_{\text{H}} = 4/\lambda_{\infty} = 1.097 \times 10^{-3} \text{\AA}^{-1}$  である。

表 1 に水素原子の主な輝線スペクトルの系列を掲げておく。

表 1: 水素原子の主な輝線スペクトル系列

| 系列                 | 波長域  | $l$ | $m$        |
|--------------------|------|-----|------------|
| ライマン (Lyman)       | 紫外   | 1   | $m \geq 2$ |
| バルマー (Balmer)      | 可視   | 2   | $m \geq 3$ |
| パッシェン (Paschen)    | 近赤外  | 3   | $m \geq 4$ |
| ブラケット (Brackett)   | 近赤外  | 4   | $m \geq 5$ |
| フント (Pfund)        | 中間赤外 | 5   | $m \geq 6$ |
| ハンフリース (Humphrys?) | 中間赤外 | 6   | $m \geq 7$ |

このようなスペクトルの性質は、原子内に束縛された電子の、離散的なエネルギー準位間の遷移によってうまく説明できる。

**問 29a** エネルギー準位間の電子の遷移に伴い、電磁波の放出・吸収が起こると考えられる。

今、原子内に束縛された電子が、エネルギー準位  $E_n$  から  $E_{n'}$  に遷移した場合、これに伴って放射・吸収される電磁波の波長  $\lambda$  及び周波数  $\nu$  を示せ。

**問 29b** リドベルグ定数  $R$  を、電子の質量  $m$ 、電子の電荷量  $e$ 、真空の誘電率  $\epsilon_0$ 、を用いて表わせ。

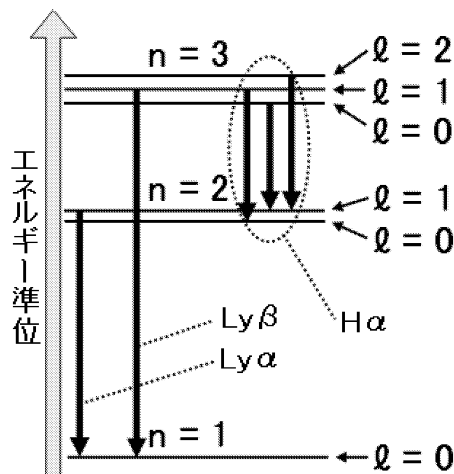
**問 29c** 主量子数  $n = 1$  に対する水素原子中の電子軌道の半径 (ボーア) 半径を、電子質量  $m$ 、電子の電荷量  $e$  を用いて示せ。

量子論を用いた原子構造を提唱したのはボーア (Bohr) であり、ブラケット系列・フント系列は、ボーアの理論の予測を元に発見された。またヘリウム原子の  $n = 4$  に対する系列はピッキング (Pickering) 系列と呼ばれ、最初に星のスペクトルにおいて発見されたものである。

バルマー系列に起因する吸収線は、ナトリウム (NaI) による D 線やカルシウム (CaII) による H 線・K 線とともに、19 世紀初めには、太陽スペクトル中のフラウンホーファー (Fraunhofer) 線として検出されている。H $\alpha$  吸収線には C 線、H $\beta$ 、H $\gamma$ 、H $\delta$  吸収線にはそれぞれ F 線、G' 線、h 線の名が付けられている。これら吸収線の多くは、太陽表面の大気中に存在する物質によるものであるが、一部の吸収線は地球大気によるものである (A 線、B 線など)。

水素原子のスペクトルは、ボーアの原子モデルで一見うまく説明できるように思われたが、スペクトルを詳細に調べたところ、一つと考えられていた輝線が、実際には何本かの輝線に分かれていることが明らかになった。これを原子スペクトルの微細構造 (fine structure) と呼ぶ。この微細構造は、電子の運動を三次元的に取り扱うことで説明できる。その結果、主量子数  $n(=1,2,3,\dots)$  に対応するエネルギー準位は、さらに整数  $l(=0,1,2,\dots,n-1)$  で特徴付けられるより微細なエネルギー準位から構成されている、という電子軌道の描像が得られる。この整数  $l$  は電子の軌道角運動量を量子化することで得られるため、**方位量子数 (azimuthal quantum number)** または**軌道角運動量子数**と呼ばれる。分光学では、方位量子数  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$  を、記号 s, p, d, f, ... を用いて表わすが、これはそれぞれ、sharp, principal, diffuse, fundamental を意味する。

**問 30** 原子核から距離  $r$  の位置を 3 次的に運動する電子を考え、運動エネルギーと電気的な位置エネルギーからこのハミルトニアン  $H$  を示せ。ただし電子の運動は極座標で表わし、 $(r, \phi, \theta)$  に共役な運動量を  $(p_r, p_\phi, p_\theta)$  とする。



次に微細構造を考慮して輝線スペクトルの放射を考察する。例えば水素原子の主量子数  $n = 3 \rightarrow 2$  の遷移に伴って放射されるバルマー系列の輝線を H $\alpha$  (6563 Å) と呼ぶ。この場合、主量子数  $n = 3$  に対して方位量子数  $l = 0, 1, 2$  で表わされる三つのエネルギー準位が存在し、 $n = 2$  に対しては  $l = 0, 1$  で表わされる二つのエネルギー準位が存在することになり、一見 6 通りの遷移が考えられる。しかし実際に観測される遷移は、

$$\Delta l = \pm 1 \tag{21}$$

を満たす 3 通りだけである。この実現する遷移の条件は、H $\alpha$  輝線に限らず、全ての遷移に対して成立し、選択則 (selection rule) と呼ばれている。

さらにここで  $z$  方向に磁場  $H$  を加えると、この角運動量の  $z$  方向成分が磁場と相互作用し、方位量子数  $l(=0,1,2,\dots,n-1)$  に対応するエネルギー準位は、さらに  $m(= -l, -l+1, \dots, 0, \dots, l-1, l)$  個に分裂する。磁場中の原子スペクトルが分裂する現象をゼーマン効果 (Zeeman effect) といい、この磁場によって特徴付けられるエネルギー準位を示す量子数  $m$  を**磁気量子数 (magnetic quantum number)** と呼ぶ。方位量子数  $l$  に対して、磁気量子数  $m$  は奇数個のエネルギー準位を持っていることになるが、1922 年のステルン (Stern) とグラッ

ハ (Gerlach) の磁場中の蒸発した銀原子を用いた実験、そして 1927 年のフィプス (Phipps) とテイラー (Taylor) による磁場中の水素原子を用いた実験では、2 本 1 対の輝線に相当するスペクトルしか得ることができなかつた。これらの実験では、いずれも磁場の影響を受けないエネルギー準位に相当する輝線が検出されなかつた。

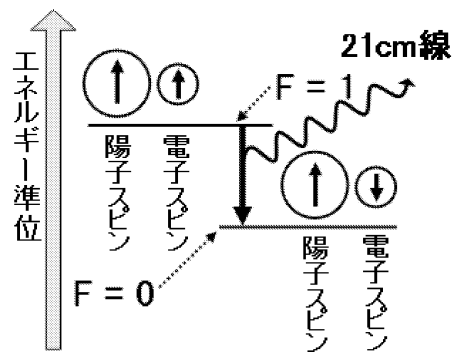
これに対する明快な説明を与えたのはパウリ (Pauli) である。彼は、絶対値が等しく、異なる符号を有する、

$$s = \pm 1/2 \quad (22)$$

なるスピン量子数またはスピン角運動量量子数  $s$  を導入した。そして磁気量子数  $m$  で特徴付けられる一つのエネルギー準位に対して、同じ符号を持つスピン量子数のエネルギー準位は一つのみであり、異なる符号のスピン量子数との一対が対応するものとした。これによって原子の電子状態は四つの量子数  $n, l, m, s$  を用いて一意に表現できることになり、さらにこの四つの量子数によって決まる唯一つのエネルギー準位には、唯一つの電子しか入り得ないというパウリの排他原理 (排他律: **exclusion principle**) が提唱されるに至った。なお、スピン量子数  $s$  が半整数値を持つような粒子をフェルミ粒子 (fermion) といい、全てのフェルミ粒子はパウリの排他原理に従うが、整数値のスピン量子数を持つボーズ粒子 (boson) は、パウリの排他原理には従わない。

**問 31** 四つの量子数  $n, l, m, s$  を考慮して、主量子数  $n$  の軌道に入り得る電子の最大数を示せ。

エネルギー準位の視点を原子全体に広げてみると、原子核を構成する陽子もまたスピンを有することが分かる。従って、水素原子では原子核 (陽子) のスピンと電子のスピンが相互作用することによって超微細構造 (hyperfine structure)、即ち新たなエネルギー準位を形成することになる。



この相互作用のエネルギー  $E$  は、

$$E = \frac{h\nu_0}{n^3} \frac{F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)}{J(J+1)(2L+1)} \quad (23)$$

となり、 $n$  は主量子数、 $I$  は原子核 (陽子) のスピン量子数、 $S$  は電子のスピン量子数、 $L$  は電子の方位量子数、そして  $J$  は  $J = L + S$  で表わされる電子の全角運動量量子数である。なお、

$$\nu_0 = g \frac{8\pi^4 m e^8}{h^5 c^2} \frac{m}{m_p} \quad (24)$$

であり、 $m$  は電子の質量、 $m_p$  は陽子の質量、 $g$  は陽子のランデ・ファクター (Landé factor) と呼ばれる値で、この場合は  $g = 5.59$  である。

1944 年、ファン・デ・フルスト (van de Hulst) は、宇宙空間中にもっとも多く存在する水素原子の基底状態に対して、この相互作用によって生じる輝線の考察を行った。この超微細構

造は、同じ原子核のスピンに対して、電子のスピンが平行状態になるエネルギー準位 ( $F = 1$ ) と反平行状態になるエネルギー準位 ( $F = 0$ ) の間の遷移によって生じる。この遷移によって生じる輝線や吸収線は、現在では中性水素 21cm 線として広く知られており、電波天文学においても最も重要な輝線の一つとなっている。

**問 32** 式 23、式 24 を用いて、中性水素 21cm 線の周波数を計算せよ。

このような量子論的な考察を、原子から分子まで拡張すると、分子の振動エネルギーや回転エネルギーまでもが量子化されることが分かる。分子の全エネルギー  $E$  は、電子励起によるエネルギー  $E_e$ 、振動励起によるエネルギー  $E_v$ 、回転励起によるエネルギー  $E_r$  の和、

$$E = E_e + E_v + E_r \quad (25)$$

で表わされ、 $E_e$  は紫外線から可視光波長域、 $E_v$  は遠赤外線波長域、 $E_r$  はミリ波からサブミリ波波長域に相当する。

振動量子数  $v$  を用いると、2 原子分子の振動エネルギーの準位  $E_v$  は、

$$E_v = h\nu \left( v + \frac{1}{2} \right) - h\nu x_e \left( v + \frac{1}{2} \right)^2 + \dots \quad (26)$$

と表わされる。ここで  $x_e$  は実験から得られる定数である。

さらに回転量子数  $J$  を用いると、回転エネルギーの準位  $E_r$  は、

$$E_r = J(J+1)Bh, \quad B = \frac{h}{8\pi^2 I} \quad (27)$$

となり、 $B$  は回転定数 (rotational constant)、 $I$  は 2 原子分子の回転軸周りの慣性モーメントである。回転エネルギー準位間の遷移にも選択則が働き、

$$\Delta J = \pm 1 \quad (28)$$

の遷移のみが許される。

**問 33a** 2 原子分子の、回転エネルギー準位  $J + 1$  から  $J$  への遷移に伴って放射される電磁波の周波数  $\nu(J + 1 \rightarrow J)$  を  $B$  を用いて表わせ。

**問 33b** 一酸化炭素  $^{12}\text{C}^{16}\text{O}$  に対しては、 $B = 57.6356$  である。 $^{12}\text{C}^{16}\text{O}(J=1-0)$  および  $^{12}\text{C}^{16}\text{O}(J=2-1)$  分子輝線の周波数を求めよ。

一酸化炭素のように電氣的に異なる 2 原子からなる分子では、電気双極子放射が実現するが、水素分子のように電氣的に等しい 2 原子からなる原子では、電気双極子放射が禁止され、電気四重極子放射のみが許されることになる。

## 5 輻射輸達

天文現象に深く関係した電磁波の放射機構としては、前述した黒体放射や輝線放射の他にも制動放射 (bremsstrahlung) やシンクロトロン放射 (synchrotron radiation)、逆コンプトン効果 (inverse Compton effect) などがある。

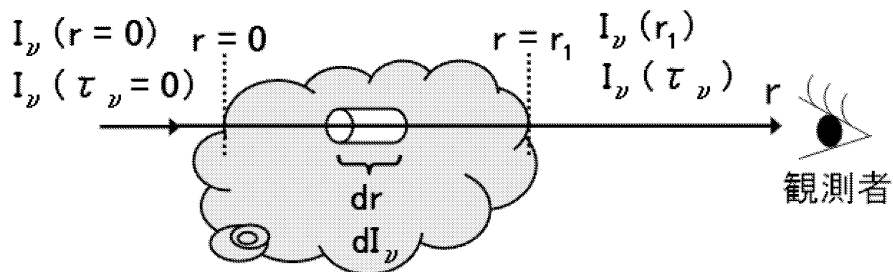
制動放射は荷電粒子、主に電子と陽子・陽イオンの衝突によって生じる粒子どうしのエネルギー交換に起因する電磁波放射である。荷電粒子は互いに自由な運動エネルギーを取り得るため、この時のエネルギー遷移は自由・自由遷移 (free-free transition) と呼ばれる。希薄な高温プラズマからは制動放射による連続的な電磁波放射が観測される。

シンクロトロン放射は、相対論的電子と呼ばれる高エネルギー電子が、磁場と相互作用して、加速度運動する際に生じる電磁波放射である。宇宙空間中には恒星磁場や星間磁場、銀河磁場など様々な磁場が存在しており、この中を高エネルギー電子が通過すると、ローレンツ力 (Lorentz force) を受けてらせん運動を行う。

逆コンプトン効果とは、高エネルギー電子が低エネルギー光子にエネルギーを与え、電子自身はエネルギーを失い、その進路を変更する現象である。ブラックホール直近の降着円盤では、高エネルギー電子による制動放射・シンクロトロン放射に加えて、逆コンプトン効果による電磁波放射が生じていると考えられている。

電磁波の放射機構に続いて、次に媒質中を進行する電磁波の振る舞いを考察する。電磁波が媒質中を進行する際、電磁波は媒質による吸収・散乱・再放射を繰り返しながら伝達していく。そしてこの過程において、電磁波はその強度とスペクトルを変化させていくことになる。このような電磁波の伝播過程は、輻射輸達 (radiative transfer) や放射輸送と呼ばれる。

まず周波数  $\nu$  の電磁波が媒質中の微小距離  $dr$  を進行するものとし、その際の媒質による単位距離あたりの吸収率を  $\kappa_\nu$  とする。また単位距離あたりの媒質からの放射率を  $\epsilon_\nu$  とする。ここで  $\kappa_\nu$  は吸収係数 (容積吸収係数)、 $\epsilon_\nu$  は放射係数 (体積放射係数) と呼ばれる。



**問 34a** 電磁波が、微小距離  $dr$  の媒質中を伝播する際の強度減少は、吸収係数  $\kappa_\nu$  と電磁波強度  $I_\nu$  の積に比例し、また強度増加は、放射係数  $\epsilon_\nu$  に比例する。このことから、強度  $I_\nu$  の電磁波が、媒質中を微小距離  $dr$  だけ進むときの強度変化  $dI_\nu$  を示せ。

前問で導出した電磁波の伝播過程を示す式を、輻射輸達 (放射輸送) 方程式という。ここで、星間雲のような“放射を行わず、吸収のみを行う”ような媒質を仮定する。そして観測者に対して、媒質の背後から強度  $I_\nu(0)$  の電磁波が入射し、幾何学的距離  $r_1$  だけ進行するものとする。

**問 34b** 星間雲の中を距離  $r_1$  だけ進行した時の電磁波強度  $I_\nu(r_1)$  を、 $I_\nu(0)$ 、 $\kappa_\nu$ 、 $r_1$  で表せ。

実際の観測では、観測者の視線方向 (line-of-sight) に沿った電磁波伝播の幾何学的距離を求めることは極めて困難である。そこで、振動数  $\nu$  の電磁波に対する光学的深さ (optical depth)、または光学的厚さ (optical thickness) を  $\tau_\nu$  で表し、

$$\tau_\nu \equiv \int_0^{r_1} \kappa_\nu dr \quad (29)$$

と定義する。すると、幾何学的距離  $r$  に対する輻射輸達方程式は、光学的深さ  $\tau_\nu$  に対して記述できるようになる。

**問 34c** 媒質からの放射を考慮に入れ、輻射輸達方程式を光学的深さ  $\tau_\nu$  に対して記述せよ。

続いて、源泉関数 (source function)  $S_\nu$  を次のように定義する。

$$S_\nu \equiv \frac{\epsilon_\nu}{\kappa_\nu} \quad (30)$$

源泉関数  $S_\nu$  は、一般に場所・時間の関数になっており、これを用いると、輻射輸達方程式は、

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu(\tau_\nu) + S_\nu(\tau_\nu) \quad (31)$$

と表される。

先程想定した星間雲に対して  $\epsilon \neq 0$  とし、星間雲の背後から電磁波が入射した時の光学的深さを 0、電磁波強度を  $I_\nu(0)$ 、入射の後、媒質中を幾何学的距離  $r_1$  だけ進行した際の光学的深さを  $\tau_\nu$ 、その時の電磁波強度を  $I_\nu(\tau_\nu)$  とする。すると、この輻射輸達方程式は、非斉次線形微分方程式なので、この一般解として、

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} e^{\tau'_\nu - \tau_\nu} S_\nu(\tau'_\nu) d\tau'_\nu \quad (32)$$

が得られる。

**問 35a** 斉次線形微分方程式、

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \quad (33)$$

の一般解を示せ。

**問 35b** 非斉次線形微分方程式、

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \quad (34)$$

の一般解を示せ。

**問 35c** 輻射輸達方程式 (式 31) から、その一般解 (式 32) を導出せよ。

**問 35d** 源泉関数  $S_\nu(\tau_\nu)$  が、時間に依存せず、媒質内で一定の場合の輻射輸達方程式の一般解を示せ。

**問 35e** 媒質が光学的に厚い (optically thick) 場合、輻射輸達方程式の一般解を近似的に示せ。

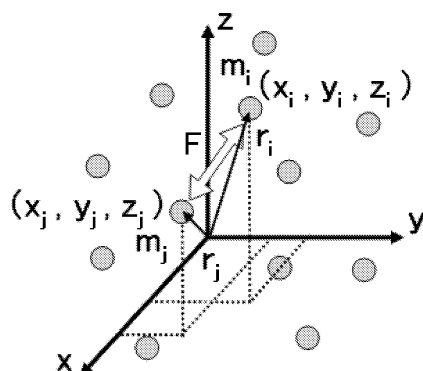
**問 35f** 媒質が光学的に薄い (optically thin) 場合、輻射輸達方程式の一般解を近似的に示せ。



## 6 重力多体系の力学的性質

天体の多くは、何らかの多体系として捕らえることが可能である。例えば恒星は単原子気体(主に水素)、球状星団は恒星、楕円銀河は恒星、渦巻銀河は恒星とガス、銀河団は銀河からなる多体系として取り扱うことができる。またこれらの物体どうしに働く力は、基本的に万有引力のみであるため、天体が自らの構造を維持するためには、万有引力に抗する何らかのシステムを有しているはずである。

ここでは最初に、球状星団や楕円銀河に代表されるような、恒星のランダム運動によって万有引力に抗い、その系を維持しているような重力多体系の性質を考えていく。



まず  $N$  個の質点からなる系を考える。質点は質量  $m_i$  を持ち、3次元空間中で座標  $(x_i, y_i, z_i)$ 、原点を中心とする位置ベクトル  $\mathbf{r}_i$  で表される場所に存在しているものとする。そして  $i$  番目の質点と  $j$  番目の質点間の距離を  $r_{i,j}$  とする。今、 $i$  番目の質点に、 $N-1$  個の質点から働く力  $\mathbf{F}$  の  $x$  方向成分を  $F_x$  とすると、 $x$  方向成分についての運動方程式は、

$$F_x = m_i \ddot{x}_i = \sum_{j \neq i}^N \frac{G m_i m_j}{r_{i,j}^2} \frac{x_j - x_i}{r_{i,j}} \quad (35)$$

と表され、同様に  $\mathbf{F}$  の  $y$  方向成分  $F_y$ 、 $z$  方向成分  $F_z$  を用いると、 $y$  方向成分、 $z$  方向成分についての運動方程式は、

$$F_y = m_i \ddot{y}_i = \sum_{j \neq i}^N \frac{G m_i m_j}{r_{i,j}^2} \frac{y_j - y_i}{r_{i,j}} \quad (36)$$

$$F_z = m_i \ddot{z}_i = \sum_{j \neq i}^N \frac{G m_i m_j}{r_{i,j}^2} \frac{z_j - z_i}{r_{i,j}} \quad (37)$$

と表される。なお  $G$  は万有引力定数である。

また系内部の全運動エネルギー  $T$  は、個々の質点の運動エネルギーの合計で表されるため、

$$T = \sum_i^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \quad (38)$$

となる。

問 36a 以下の関係式、

$$\sum_i^N (m_i x_i \ddot{x}_i + m_i y_i \ddot{y}_i + m_i z_i \ddot{z}_i) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \sum_i^N m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - 2T \quad (39)$$

が成り立つことを示せ。

次に式 39 の左辺に、式 35、式 36、式 37 を代入すると、

$$\sum_i^N (m_i x_i \ddot{x}_i + m_i y_i \ddot{y}_i + m_i z_i \ddot{z}_i) = \sum_i^N \sum_{j \neq i}^N \frac{G m_i m_j (x_i (x_j - x_i) + y_i (y_j - y_i) + z_i (z_j - z_i))}{r_{i,j}^3} \quad (40)$$

となる。今、式 40 の右辺について、二つの総和  $\sum_i^N \sum_{j \neq i}^N$  を、 $x$  方向成分、 $y$  方向成分、 $z$  方向成分ごとに実行することを考える。特に  $i$  番目の質点に対する  $j$  番目の質点の寄与と、 $j$  番目の質点に対する  $i$  番目の質点の寄与を考慮して整理すると、

$$\sum_i^N (m_i x_i \ddot{x}_i + m_i y_i \ddot{y}_i + m_i z_i \ddot{z}_i) = \sum_{i,j \neq i}^N \left( -\frac{G m_i m_j}{r_{i,j}} \right) \quad (41)$$

となる。

**問 36b** 上で導出した式 41 が成り立つことを示せ。

式 41 の右辺は、質点を持つ重力ポテンシャルエネルギーを、系内の全ての質点に対して合計したものであるから、これは系の全重力ポテンシャルエネルギーである。そこで系の全重力ポテンシャルエネルギーを  $\Omega$  とすると、

$$\Omega = - \sum_{i,j \neq i}^N \frac{G m_i m_j}{r_{i,j}} \quad (42)$$

となる。

**問 36c** 系の全運動エネルギー  $T$  と全重力ポテンシャルエネルギー  $\Omega$  の関係を示せ。

式 39 の右辺第 1 項は、質量の空間分布のモーメントを時間で 2 階微分した形になっている。質量の空間分布のモーメントは、銀河の内部運動のような長いタイムスケールで考えた時、ほとんど時間依存しないと考えてよい。従って、系の全運動エネルギー  $T$  と全重力ポテンシャルエネルギー  $\Omega$  は、

$$2T + \Omega = 0 \quad (43)$$

となる。

このように万有引力に対してランダム運動などでその構造が維持された状態をビリアル平衡 (virial equilibrium) 状態と言う。一般的には、球状星団や楕円銀河は恒星が、銀河団は銀河がビリアル平衡状態に達した系であると考えられている。また渦巻銀河は恒星とガスが回転運動によってビリアル平衡を維持している天体と考えられる。

観測的研究から、渦巻銀河にはタリー・フィッシャー (Tully-Fischer=TF) 関係、楕円銀河にはフェイバー・ジャクソン (Faber-Jackson=FJ) 関係が確認されている。これら二つの関係は、1) 渦巻銀河や楕円銀河がビリアル平衡状態にあると仮定し、さらに全ての渦巻銀河や楕円銀河で 1) 質量光度比が一定、2) 中心部分の表面輝度が一定、と仮定することで説明できる。

**問 37a** TF 関係、FJ 関係について簡単に説明せよ。

**問 37b** 上記条件の下で、渦巻銀河の半径を  $R$ 、回転速度を  $v$ 、光度を  $L$  とした時、TF 関係が成り立つことを示せ。

**問 37c** 上記条件の下で、楕円銀河の半径を  $R$ 、内部の恒星の速度分散を  $\sigma$ 、楕円銀河の光度を  $L$  とした時、FJ 関係が成り立つことを示せ。

ここで観測から、ビリアル平衡状態にある銀河団の質量を求める方法を考察する。まず撮像観測によって、銀河団に属すると考えられる銀河の空間分布を調べることができる。これによって銀河団の典型的な半径  $R$  が得られる。続いて分光観測によって、銀河団内の代表的と思われる幾つかの銀河の後退速度を測定することによって、銀河団銀河の速度分散  $\sigma$  の視線方向成分  $\sigma_{los}$  が得られる (los=line of sight)。ビリアル平衡条件から、これら観測量を用いて、銀河団の全質量を導くことができる。

**問 38a** 銀河団の形状が球形で、銀河団銀河の内部運動が完全にランダムであると考え、統計的に  $\sigma = \sqrt{3}\sigma_{los}$  とできることを示せ。

**問 38b** さらに、銀河団のメンバー銀河の質量が全て等しいと仮定して、ビリアル平衡条件から銀河団の全質量を  $R$ 、 $\sigma_{los}$  で表せ。なお、万有引力定数は  $G$  としてよい。

前問の銀河団に関する考察は、銀河団銀河を恒星に置き換えることで、楕円銀河に応用できる。楕円銀河には FJ 関係に加えて、コルメンディ (Kormendy) 関係と呼ばれる表面輝度とサイズの相関や、 $D_n - \sigma$  関係と呼ばれるサイズと速度分散の相関が良く知られている。特にサイズと速度分散、光度がなす 3 次元の位相空間中で、楕円銀河は厚みを有した平面状に分布する (基本平面=fundamental plane) が、楕円銀河がビリアル平衡状態にあると考えると、前述した三つの相関関係に加えて、基本平面をも容易に説明することが可能となる。

**問 39** 楕円銀河がビリアル平衡状態にあるという条件に加えて、1) 楕円銀河の質量光度比が一定である、2) 楕円銀河はランダム運動のみでその構造を支えている、と仮定した場合、楕円銀河に関する三つの相関と基本平面を統一的に説明せよ。

前問で仮定した条件が全て正しければ、楕円銀河の基本平面とビリアル平面は完全に一致する。しかし、実際にはこの二つの平面は完全には一致しない。その要因としては、a) 質量光度比が一定ではなく、質量や光度のベキに比例する、b) ランダム運動に加えて、回転運動によるサポートが無視できない、c) 星生成史の違いによる、などを初め多くの理由が提案されているが、今だ議論に決着はついていない。

**問 40** 楕円銀河の基本平面とビリアル平面が一致しない理由の要因として、「質量光度比が一定ではなく、光度のベキに比例する」が挙げられる理由を示せ。

なお、銀河団の質量に関しては、銀河団の重力ポテンシャル内に閉じ込められた高温プラズマを、静水圧平衡 (hydrostatic equilibrium) 条件下にあると考えて、その質量分布を導出することも可能である。

**問 41a** 銀河団の形状を等方的な球形と考え、銀河団中心からの距離を  $R$ 、高温プラズマの密度分布を  $\rho(R)$ 、 $R$  より内側に存在する質量を  $M(R)$  としたとき、圧力勾配  $dP/dR$  が、

$$\frac{dP}{dR} = -G \frac{M(R)\rho(R)}{R^2} \quad (44)$$

と表されることを示せ。

**問 41b** 高温プラズマの温度を  $T(R)$ 、とした時、銀河団の質量  $M(R)$  が、

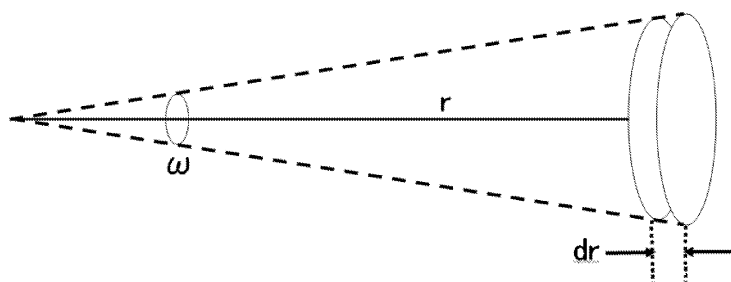
$$M(R) = -\frac{k_B T(R) \cdot R}{G \mu m_p} \left( \frac{d \ln n_e(R)}{d \ln R} + \frac{d \ln T(R)}{d \ln R} \right) \quad (45)$$

と表されることを示せ。ただし  $k_B$  はボルツマン定数、 $m_p$  は陽子質量、 $n_e(R)$  は電子密度、 $\mu$  は高温プラズマの有効分子量である。

## 7 宇宙論に向けて

人類が宇宙に目を向け始めた時期は、紀元前数千年前の古代エジプト、古代ギリシアの時代にまで遡る。古代ギリシア、から古代マケドニア・古代ローマの時代には、星の運行を体系的に説明しようとした天動説が地動説を排し、古代ローマ帝国の庇護の下、キリスト教会の台頭に伴って、ヨーロッパの科学は以後 1000 年に渡って停滞する。

ヨーロッパの自然科学が、緩やかながらも発展を再開したのは、13 世紀末にイタリアのベネツィアから始まったルネッサンス (学芸復興) と大航海時代以降である。コペルニクスによる地動説の再発見、ガリレオによる望遠鏡を用いた天体観測、ケプラーによるケプラーに法則の発見を経て、ついには 17 世紀末期のニュートンによる万有引力の法則と運動の法則の発見に到る。しかし宇宙そのものについての研究は、さらに 18 世紀末、ハーシェルが観測にもとづいた星の空間分布図を作製したことに始まる。このころの人類にとっての宇宙とは、ただ単に「星が存在する空間」であった。



**問 42a** 全ての恒星の真の明るさを一定 (つまり暗い恒星は明るい恒星より遠くに位置するもの) とし、恒星の空間分布が一様 ( $n_0$ ) であり、宇宙が有限の大きさや形を持っている、と仮定する。さらに、観測によって宇宙の端 (地球からの距離  $r_m$ ) に位置する恒星まで検出可能であるとする。この時、観測で見込む天域の立体角を  $\omega$  としたとき、この天域内で地球から距離  $r$  だけ離れた厚さ  $dr$  の円盤状領域内に含まれる恒星の数を求めよ。なお星間物質などによる吸収は考えなくともよい。

**問 42b** 上記仮定の下で、恒星の数を数えることで宇宙の端までの距離を求められることを説明せよ。

**問 43** 宇宙が無限に広がっており、星の真の明るさが一定で、かつ恒星の空間分布が一様であるとすると、また見かけの等級が  $m$  等および  $n$  等である恒星の光度を  $I_m$ 、 $I_n$  とする。この時、

$$\frac{N_n}{N_m} = \left( \frac{I_m}{I_n} \right)^\alpha$$

の  $\alpha$  を求めよ。またこの式からある等級の恒星の数と、それより 1 等級暗い恒星の数の比がいくつになるか示せ。

様々な観測に基づいて、我々が住む巨大な恒星集団—銀河系 (The Galaxy, The Milky Way)—の構造は次第に明らかになってきたが、19 世紀初頭、渦巻星雲とよばれる天体の正体については依然議論は続いていた。即ち、1) 渦巻星雲とは散光星雲や球状星団のように銀河系内部の星雲状天体であるという説と、2) 渦巻星雲は銀河系と同等の巨大な恒星集団であるという説の対立である。ハッブル (Hubble) はアンドロメダ星雲内のセフィイド型変光星の変光周期を観測から求め、セフィイド型変光星の周期・光度関係からアンドロメダ星雲までの距離を導出、これが銀河系の外に位置する天体であることを示した。これによって渦巻星雲は銀

河系と同等の渦巻銀河 (spiral galaxies) であることが明らかとなり、何千年にもおよぶ「星が存在する空間が宇宙」という概念は大きく覆されることになった。

一方、アインシュタイン (Einstein) は、自らが 1915 年に発表した一般相対性理論をこの宇宙そのものに応用したところ、宇宙はやがて自らの重力によって収縮してしまうという結果を得たものの、宇宙は未来永劫変化しないもの、という信念を持っていたアインシュタインは、これに対する抗力として宇宙項 (万有引力に対する斥力に相当するもの) を一般相対性理論の中に取り入れた。しかし 1929 年にハッブルが、遠方に存在する渦巻銀河ほど、その距離  $d$  に比例した速さ  $v$  で我々から遠ざかっているというハッブルの法則を発見し、膨張宇宙の概念に観測的状況証拠を与えることになった。

$$v = H_0 d \quad (46)$$

比例定数  $H_0$  はハッブル定数と呼ばれ、現在では宇宙論の理論的・観測的要とも言えるパラメータの一つである。なお、アインシュタインがこの後、自らの方程式に宇宙項を取り入れたことを酷く後悔した逸話はあまりに有名である。

問 44 相対論的効果を考慮すると、系外銀河の後退速度  $v$  と赤方偏移  $z$  の間には、

$$\frac{v}{c} = \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1} \quad (47)$$

という関係が成り立つ。ここで  $c$  は光速である。この関係式が、近傍宇宙 ( $z \ll 1$ ) では、

$$\frac{v}{c} = z \quad (48)$$

と近似的に表現できることを示せ。

今日、多くの研究者によって受け入れられているビッグバン宇宙論では、我々の宇宙は初期の超高温・超高密度状態から膨張が始まり、現在もその膨張が続いていることになる。ただしこの宇宙膨張が永遠に続くのか？それとも途中で収縮に転じるのか？は宇宙に存在する質量とエネルギーの総和が臨界密度を上回るか否かで決まると考えられている。この宇宙の臨界密度  $\rho_c$  と実際の密度  $\rho$  の比を密度パラメータと呼び、 $\Omega$  を用いて次のように表す。

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (49)$$

問 45 宇宙の臨界密度  $\rho_c$  が、

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (50)$$

で表されることを示せ。

宇宙膨張の状況証拠として、しばしば取り上げられるものの一つに、“**オルバースのパラドックス (Olbers' Paradox)**”がある。これは宇宙が無限に広がっており、その中に光度  $L$  の天体が一樣密度  $n$  で存在していると仮定すると、夜空が無限に明るいことになってしまい、現実の夜空が暗いことと矛盾する、というものである。しかしこのパラドックスそのものは、宇宙膨張を証明するための必要十分条件にはなっていない。

問 46a 地球から距離  $r$  だけ離れた光度  $L$  の天体から届く光の強度  $I$  を示せ。

問 46b 地球から  $r$  だけ離れた厚み  $dr$  の球殻を考える。この球殻の厚みの中に存在する光度  $L$  の天体の総数を示せ。

問 46c 上記の仮定の下で、オルバースのパラドックスが成立することを示せ。

問 46d 宇宙膨張以外のオルバースのパラドックスの解決方法を三つ以上示せ。

参考文献：(演習問題順に列挙)

- 横尾 武夫 編 (1993), 『現代天文学演習 新・宇宙を解く』, 恒星社.
- 戸田 盛和 (1982), 物理入門コース 1 『力学』, 岩波書店.
- 永田 一清 (1981), 基礎の物理 4 『電磁気学』, 朝倉書店.
- 清水 忠雄 (1982), 基礎の物理 5 『電磁波の物理』, 朝倉書店.
- 小野 嘉之 (1993), 『シュレディンガー方程式の解法』, 丸善株式会社.
- 清水 清孝 (1992), 物理数学 OnePoint 2 『シュレディンガー方程式の解き方教えます』, 共立出版.
- 井上 健 訳 (1970), 物理学業書 2 『シッフ 新版 量子力学 (上)』, 吉岡書店.
- Kittel, C. 著, 山下 次郎, 福地 充 共訳 (1983), 『熱物理学』, 丸善株式会社.
- 寺内 暉, 『現代物理学入門 原子の構造』, 関学生協出版委員会.(入手不可)
- 堂山 昌男 訳 (1979), 『シアーズ/サリンジャー 熱力学・統計熱力学第3版』, 共立出版株式会社.
- Herzberg, G. 著, 堀 健夫 訳 (1964), 『原子スペクトルと原子構造』, 丸善株式会社.
- 山内 恭彦 (1968), 新物理学シリーズ 4 『量子力学』, 培風館.
- 小暮 智一 (1994), 宇宙物理学講座 第3巻 『星間物理学』, ごとう書房.
- 赤羽 賢司, 海部 宣男, 田原 博人 (1988), 『宇宙電波天文学』, 共立出版株式会社.
- Spitzer, L., Jr. 著, 高窪 啓弥 訳 (1980), 『星間物理学』, 共立出版株式会社.
- 大脇 直明, 磯部 三, 斎藤 馨児, 堀 源一郎 (1989), 『天文資料集』, 東京大学出版会.
- Tayler, R. J. (1978), Galaxies: structure and evolution - Revised edition, Cambridge University Press, Cambridge.
- 岡村 定矩 (1999), 『銀河系と銀河宇宙』, 東京大学出版会.
- 桜井 邦朋 (2007), ブルーバックシリーズ 『宇宙物理学入門』, 講談社.